Katedra fyziky FP TUL Liberec

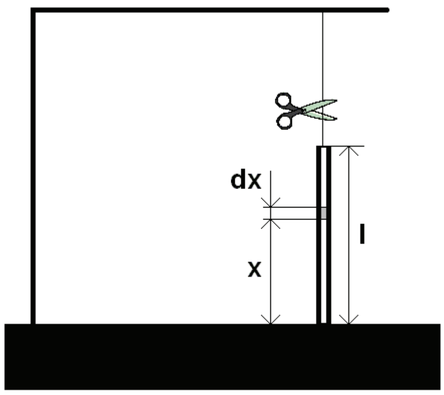
TEST Z FYZIKY
K PŘIJÍMACÍ ZKOUŠCE DO NAVAZUJÍCÍHO MAGISTERSKÉHO STUDIA
pro akademický rok 2013 – 2014

obory

Učitelství fyziky pro 2. stupeň ZŠ
Učitelství fyziky pro SŠ

1) Řetízek o hmotnosti $m = 1{,}0$ kg a délce $l = 1{,}5$ m visí na niti tak, že se svým spodním koncem dotýká desky stolu. Po přestřižení nitě dopadl řetízek na stůl. Stanovte velikost celkové hybnosti p, která byla stolu předána.

Řešení:



Řetízek si představíme jako soubor mnoha elementů o délce dx. Každý element přispívá k celkové hybnosti příspěvkem $dp = v \cdot dm$, kde v je rychlost v elementu v okamžiku nárazu na stůl. Element padající z výšky x má v okamžiku nárazu rychlost: (lze vyjádřit např. ze ZZME)

$$E_p = E_k \;\Rightarrow\; m \cdot g \cdot x = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$$

Pak příspěvek $dp = \sqrt{2 \cdot g \cdot x} \cdot dm$ **5 bodů**

Hmotnost elementu dm vyjádříme pomocí poměru hmotnosti a délky řetízku:

$$\frac{m}{l} = \frac{dm}{dl} \;\Rightarrow\; dm = \frac{m}{l} \cdot dx$$

Pro příspěvek elementu délky dx platí výsledný vztah: $dp = \sqrt{2 \cdot g \cdot x} \cdot \frac{m}{l} \cdot dx$ **5 bodů**

Pro celkovou hybnost musíme integrálem sečíst příspěvky všech elementů tvořících řetízek:

$$p = \int_0^l dp = \int_0^l \sqrt{2 \cdot g \cdot x} \cdot \frac{m}{l} \cdot dx = \sqrt{2 \cdot g} \cdot \frac{m}{l} \cdot \int_0^l x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \sqrt{2 \cdot g} \cdot \frac{m}{l} \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^l = \sqrt{2 \cdot g} \cdot \frac{m}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot l^{3/2}$$

$$\boxed{p = \frac{2}{3} \cdot m \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot l}}$$

10 bodů

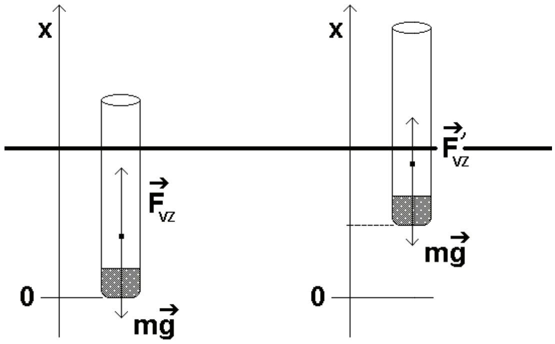
$$p = \frac{2}{3} \cdot 1{,}0 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5} = \mathbf{3{,}62\ kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

5 bodů

Katedra fyziky FP TUL Liberec

2) Válcový hustoměr o hmotnosti m a průměru D plove ve svislé poloze v kapalině hustoty ρ. Ve svislém směru byl hustoměru udělen malý impuls. Stanovte dobu kmitu T hustoměru. Pohyb kapaliny a tření zanedbejte. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty $m = 400$ g, $D = 1$ cm a $\rho = 1000$ kg·m^{-3}.

Řešení:



Situaci v rovnovážném stavu zachycuje levá polovina obrázku. Tíhová síla $m \cdot \vec{g}$ je v rovnováze se silou vztlakovou $\vec{F}_{vz0}$ danou Archimédovým zákonem, hustoměr je v klidu. Pokud vychýlíme hustoměr z rovnovážné polohy posunutím o vzdálenost x směrem vzhůru, zmenší se objem ponořené části hustoměru o: $\Delta V = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot x$

Vztlaková síla poklesne o: $\Delta F_{vz} = \Delta V \cdot \rho \cdot g = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot x$ **5 bodů**

Výsledná síla: $F = -m \cdot g + (F_{vz0} - \Delta F_{vz}) \Rightarrow F = -\Delta F_{vz}$, protože velikost vztlakové síly F_{vz0} a tíhové síly jsou stejné.

Pohybová rovnice má tvar:

$$-\pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot x = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -\pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \rho \cdot g}{4 \cdot m} \cdot x = 0$$

5 bodů

Máme diferenciální rovnici 2. řádu bez pravé strany. Řešení je známé v podobě harmonické funkce. Zlomek před proměnnou x představuje kvadrát úhlové frekvence:

$$\frac{\pi \cdot D^2 \cdot \rho \cdot g}{4 \cdot m} = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^2 \cdot \rho \cdot g}{4 \cdot m}}$$

Odtud s využitím vztahu $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ získáme hledanou periodu kmitu:

$$\boxed{T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot m}{\pi \cdot D^2 \cdot \rho \cdot g}}}$$

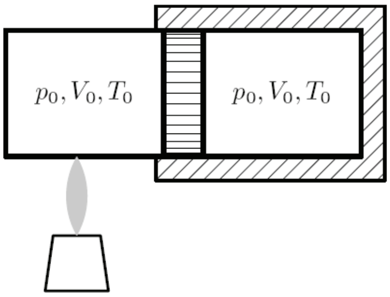
10 bodů

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}4}{\pi \cdot 0{,}01^2 \cdot 1000 \cdot 9{,}81}} = \mathbf{4{,}53\ s}$$

5 bodů

Katedra fyziky FP TUL Liberec

3) Ve válcové nádobě se může volně pohybovat píst (viz obrázek). V počátečním stavu rozděluje píst nádobu na dva stejné objemy, v nichž se nachází dvouatomový ideální plyn (κ = 7/5). Plyn v každé části nádoby má objem V_0, tlak p_0 a teplotu T_0. Pravá část nádoby je tepelně izolována od okolí, stejně tak píst nepropouští teplo. Levou část nádoby zahřejeme tak, že se objem plynu v pravé části nádoby zmenší na polovinu. Určete po zahřátí tlak a teplotu v obou částech nádoby (p_1, T_1, p_2, T_2). Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa, $V_0 = 2{,}00 \cdot 10^{-3}$ m^3, $T_0 = 293$ K.



Řešení:

Píst se ustálí po vyrovnání tlaků, proto $p_1 = p_2$. **2 body**

V pravé části nádoby proběhl adiabatický děj, pro nějž platí:

$p_0 \cdot V_0^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$, kde $V_2 = \frac{1}{2} \cdot V_0$ **2 body**

5 bodů **2 body**

Odtud dostaneme: $\boxed{p_1 = p_2 = 2^\kappa \cdot p_0}$ $p_1 = p_2 = 2^{7/5} \cdot 1{,}00 \cdot 10^5 = \mathbf{2{,}64 \cdot 10^5\ Pa}$

V levé části nádoby platí pro plyn stavová rovnice:

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1}, \text{kde } V_1 = \frac{3}{2} \cdot V_0 \text{ a } p_1 = 2^\kappa \cdot p_0$$

5 bodů

Odtud dostaneme: $\boxed{T_1 = 3 \cdot 2^{\kappa-1} \cdot T_0}$ $T_1 = 3 \cdot 2^{\frac{7}{5}-1} \cdot 293 = \mathbf{1160\ K}$ **2 body**

V pravé části nádoby platí pro plyn stavová rovnice:

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}, \text{kde } V_2 = \frac{1}{2} \cdot V_0$$

5 bodů

Odtud dostaneme: $\boxed{T_2 = 2^{\kappa-1} \cdot T_0}$ $T_1 = 2^{\frac{7}{5}-1} \cdot 293 = \mathbf{387\ K}$ **2 body**

Katedra fyziky FP TUL Liberec

4) Cívkou po připojení stejnosměrného napětí $U_{DC} = 100$ V prochází elektrický proud $I_{DC} = 2$ A. Po připojení téže cívky ke střídavému napětí $U_{AC} = 100$ V o frekvenci $f = 50$ Hz prochází cívkou proud o velikosti $I_{AC} = 800$ mA? Stanovte indukčnost cívky L. Jak velký bude fázový úhel φ mezi proudem a napětím?

Řešení:

Po připojení cívky na stejnosměrné (DC) napětí velikost proudu procházejícího cívkou závisí pouze na odporu vinutí cívky. Z Ohmova zákona lze stanovit odpor vinutí R:

$$R = \frac{U_{DC}}{I_{DC}} \qquad \boxed{\textbf{2 body}}$$

(Pozn.: pro AC počítáme s efektivními hodnotami)

Po připojení cívky na střídavé (AC) napětí velikost proudu procházejícího cívkou závisí na impedanci cívky Z:

$I_{AC} = \dfrac{U_{AC}}{Z}$ Odtud lze stanovit impedanci cívky Z: $Z = \dfrac{U_{AC}}{I_{AC}}$ $\boxed{\textbf{2 body}}$

Pro impedanci reálné cívky platí vztah:

$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2}$, kde f je frekvence střídavého napětí a L indukčnost cívky.

Po dosazení impedance do vztahu pro velikost proudu cívkou získáme:

$$\sqrt{\left(\frac{U_{DC}}{I_{DC}}\right)^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2} = \frac{U_{AC}}{I_{AC}} \Rightarrow \left(\frac{U_{DC}}{I_{DC}}\right)^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2 = \left(\frac{U_{AC}}{I_{AC}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = \sqrt{\left(\frac{U_{AC}}{I_{AC}}\right)^2 - \left(\frac{U_{DC}}{I_{DC}}\right)^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_{AC}}{I_{AC}}\right)^2 - \left(\frac{U_{DC}}{I_{DC}}\right)^2}} \qquad \boxed{\textbf{10 bodů}}$$

$$L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50} \cdot \sqrt{\left(\frac{100}{0{,}8}\right)^2 - \left(\frac{100}{2}\right)^2} = \mathbf{0{,}365\ H = 365\ mH} \qquad \boxed{\textbf{2 body}}$$

Pro fázový posun napětí a proudu platí vztah: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R}$, který lze upravit do podoby:

$$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L}{\frac{U_{DC}}{I_{DC}}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot I_{DC}}{U_{DC}}\right)} \qquad \boxed{\textbf{7 bodů}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}365 \cdot 2}{100}\right) = \mathbf{66{,}44° = 66°\ 26'} \qquad \boxed{\textbf{2 body}}$$

Napětí se předbíhá před proudem.